MATEMÁTICA DISCRETA I

PRIMER CONTROL

Apellidos..**Nombre**....................**nº mat.**......................

Ejercicio 1 (8 puntos)

a) Define por extensión el conjunto $X = \{5i - 3 \mid i \in Z, -5 \leq i \leq 3\}$ y obtén el cardinal del conjunto $Y = \{5i - 3 \mid i \in Z, -3072 \leq i \leq 7527\}$.

b) En el conjunto Z se define la relación aRb $\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 3(a - b)$. Averigua si se trata de una relación de equivalencia y, de ser cierto, encuentra la clase de equivalencia del 2.

c) Demuestra, por inducción, que $\forall n \epsilon \mathbb{N}$ se verifica la igualdad

$$3 + 8 + 15 + \dots\ + n(n + 2) = \frac{n(n + 1)(2n + 7)}{6}$$

Nótese que $3 + 8 + 15 + \dots\ + n(n + 2) = \sum_{k=1}^{n} k(k + 2)$

Solución:

a) $X = \{-28, -23, -18, -13, -8, -3, 2, 7, 12\}$

$|Y| = 3072 + 1 + 7527 = 10600.$

b) Observamos primero que aRb $\Leftrightarrow a^2 - 3a = b^2 - 3b$. Entonces:

- R es reflexiva porque aRa ya que $a^2 - 3a = a^2 - 3$a.

- R es simétrica ya que aRb $\Leftrightarrow a^2 - 3a = b^2 - 3b \Leftrightarrow b^2 - 3b = a^2 - 3a \Leftrightarrow b.$

- R es simétrica ya que

aRb $y\ bRa \Leftrightarrow a^2 - 3a = b^2 - 3b\ y\ b^2 - 3b = c^2 - 3c \Rightarrow a^2 - 3a = c^2 - 3c \Leftrightarrow aRc$

Por tanto se trata de una relación de equivalencia.

La clase de equivalencia del 2 es

$[2] = \{\text{a} \in Z \mid aR2\} = \{\text{a} \in Z \mid a^2 - 3a = 2^2 - 3 \cdot 2\} = \{\text{a} \in Z \mid a^2 - 3a + 2 = 0\} = \{1,2\}$.

c) Comprobamos que se cumple para n=1: $3 = \frac{1(1+1)(2+7)}{6}$

Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir,

$$3 + 8 + 15 + \dots\ + k(k + 2) = \frac{k(k + 1)(2k + 7)}{6}$$

Y vamos a ver que entonces se cumple para $n = k + 1$, es decir,

$$3 + 8 + 15 + \dots\ + k(k + 2) + (k + 1)(k + 3) = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 9)}{6}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 3 + 8 + 15 + \dots\ + k(k + 2) + (k + 1)(k + 3) &= (H.I) \\ &= \frac{k(k + 1)(2k + 7)}{6} + (k + 1)(k + 3) \\ &= \frac{k(k + 1)(2k + 7) + 6(k + 1)(k + 3)}{6} = \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6k + 18)}{6} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 9)}{6} \end{aligned}$$

Observaciones:

- TIEMPO: 2:00 horas
- Justificar todas las respuestas.
- Sólo se valorarán aquellas respuestas que utilicen los métodos desarrollados en esta asignatura.
- No está permitido el uso de calculadoras, ordenadores personales, ni teléfonos móviles.

Ejercicio 2 (14 puntos)

Sea D_{200} el conjunto de todos los divisores de 200, y | la relación de divisibilidad dada por $a|b$ si y sólo si "*a* divide a *b*".

a) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado ($D_{200}\backslash\{1\}$, |).

b) Obtén las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo, si los hay, del subconjunto B = $\{10, 40, 50\} \subseteq D_{200}\backslash\{1\}$.

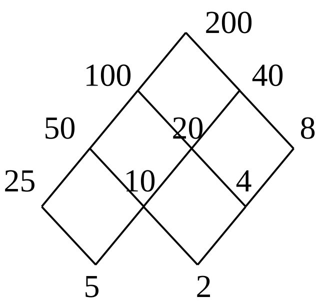
c) Obtén los maximales, minimales, máximo y mínimo, si los hay, del conjunto $D_{200}\backslash\{1\}$.

d) Razona si ($D_{200}\backslash\{1\}$, |) es retículo.

e) Razona si (D_{200}, |) es retículo complementario, y en caso de no serlo dar un elemento que no tenga complementario y otro que sí lo tenga (indicando cual es su complementario).

f) Dibuja el diagrama de Hasse de un conjunto ordenado X donde haya un subconjunto Y de dos elementos que tenga cotas inferiores pero no tenga ínfimo, y sin embargo el conjunto X tenga máximo y mínimo. ¿Puede ser X retículo?

Solución:

a) 

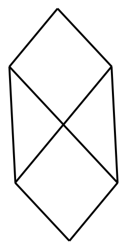
b) Cotas superiores: 200; cotas inferiores: 2, 5, 10; supremo: 200; ínfimo:10.

c) Maximales: 200; minimales:2, 5; máximo: 200; mínimo: no hay.

d) ($D_{200}\backslash\{1\}$, |) no es retículo pues tiene varios elementos minimales (no existe inf (2,5)).

e) (D_{200}, |) no es retículo complementario pues en la factorización de 200 hay factores repetidos.

10 no tiene complementario y 15 es el complementario de 8.

f) 

No puede ser retículo pues no existe el ínfimo de un par de elementos.

Ejercicio 3 (10 puntos)

Un hotel rural dispone de 16 habitaciones numeradas del 0 al 15, entre las que hay habitaciones dobles y sencillas. Las habitaciones dobles son las numeradas como: 1, 4, 6, 8, 11, 12, 14 y 15, siendo sencillas el resto de habitaciones.

a) Diseña una función booleana que determine cuándo una habitación es doble o sencilla (contestando 1 cuando es doble y 0 cuando es sencilla), y obtén su expresión elemental (como suma de productos elementales).

b) Simplifica dicha función obteniendo su expresión como "mínima suma de productos" utilizando el método de Quine-McCluskey.

Solución:

Usando la expresión booleana o binaria de los números del 0 al 15, el conjunto de verdad de la función buscada será:

$$S(f) = \{1, 4, 6, 8, 11, 12, 14, 15\} = \{0001, 0100, 0110, 1000, 1011, 1100, 1110, 1111\}$$

y su expresión elemental:

$$f(xyzt) = x'y'z't + x'yz't' + x'yzt' + xy'z't' + xy'zt + xyz't' + xyzt' + xyzt$$

Su expresión simplificada es:

$$f(xyzt) = yt' + xzt + xz't' + x'y'z't$$

Ejercicio 4 (8 puntos)

Una patrulla de la policía municipal de una ciudad ha impuesto sanciones de tráfico por valor de 3700 €, sabiendo que la sanción por exceso de velocidad es de 600 € y la sanción por aparcamiento indebido es de 250 €, averigua, utilizando el algoritmo de Euclides, cuántas sanciones ha impuesto de cada uno de los dos tipos.

Solución:

Sea x el número de sanciones por exceso de velocidad, e y el número de sanciones por aparcamiento indebido, entonces hay que resolver la ecuación diofántica

$$600x + 250y = 3700$$

Que simplificada queda

$$12x + 5y = 74$$

Se calcula el máximo común divisor de los coeficientes y se comprueba que la ecuación tiene solución: $\begin{cases} 12 = 5 \,.\, 2 + 2 \\ 5 = 2 \,.\, 2 + 1 \end{cases} \Rightarrow mcd(12, 5) = 1|74$, luego la ecuación tiene solución.

$1 = 5 - 2 \,.\, 2 = -2 \,.\, 12 + 5 \,.\, 5 \;\; \Rightarrow \;\; 74 = -148 \,.\, 12 + 370 \,.\, 5$

La solución general de la ecuación es:

$$\begin{cases} x = -148 + 5t \\ y = 370 - 12t \end{cases} \quad \forall t \in Z$$

Los valores de x e y deben ser enteros y positivos:

$$\begin{cases} x = -148 + 5t \geq 0 \\ y = 370 - 12t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq \dfrac{148}{5} \approx 29{,}6 \\ t \leq \dfrac{370}{12} \approx 30{,}8 \end{cases} \Rightarrow t = 30 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \end{cases}$$

Por tanto, impuso 2 sanciones por exceso de velocidad y 10 sanciones por aparcamiento indebido.